

Décisions dans l'incertain

Le problème du vendeur de journaux

Jean-Philippe CHANCELIER

Mai 2020



LE PROBLÈME DU VENDEUR DE JOURNAUX (UNE PÉRIODE)

- ▶ Chaque matin, le vendeur doit décider d'un nombre de journaux à commander $u \in \mathbb{U} = \{0, 1, \dots\}$ au prix unitaire $c > 0$.
- ▶ La demande du jour est **incertaine** $w \in \mathbb{W} = \{0, 1, \dots\}$
 - ▶ Si à la fin de la journée il lui reste des invendus : coût unitaire $c_S \in \mathbb{R}$.

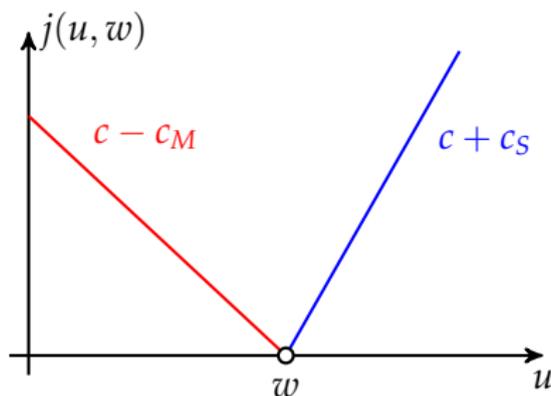
$$c_S(u - w)_+ = c_S \underbrace{\max(u - w, 0)}_{\text{invendus}} \quad c > -c_S$$

- ▶ Si à la fin de la journée il n'a pas pu faire face à la demande on associe un coût unitaire c_M . Le coût lié à la non satisfaction de la demande est

$$c_M(w - u)_+ = c_M \underbrace{\max(w - u, 0)}_{\text{manquants}}$$

FACE À UNE DEMANDE ALÉATOIRE, LE COÛT EST ALÉATOIRE

$$j(u, w) = \underbrace{cu}_{\text{achats}} + \underbrace{c_s(u - w)_+}_{\text{invendus}} + \underbrace{c_M(w - u)_+}_{\text{manquants}}$$



$\text{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} j(u, w) = \{w\}$: Quantité inconnue w !

CHOIX D'UN CRITÈRE EN ESPÉRANCE

Le choix du critère : Attitude face au risque du décideur. Le vendeur de journaux va vendre ses journaux chaque jours, on choisit ici un critère en espérance.

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) := \underbrace{\mathbb{E}_w[j(u, w)]}_{\text{Espérance}}$$

Ce n'est pas un critère unique : Un vendeur de journaux pessimiste pourrait minimiser le pire des cas (utilise le support de la loi de la demande) :

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) := \underbrace{\max_{w \in \overline{\mathbb{W}}} j(u, w)}_{\text{Pire des cas}}$$

MINIMISATION DU COÛT EN ESPÉRANCE

- ▶ On suppose que la demande, \mathbf{W} , est une variable aléatoire et le vendeur de journaux connaît, **distribution** $\mathbb{P}_{\mathbf{W}}$, la loi de \mathbf{W} .
- ▶ Le coût à minimiser devient

$$J(u) = \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[cu + c_s(u - \mathbf{W})_+ + c_M(\mathbf{W} - u)_+]$$

- ▶ Le problème du vendeur de journaux devient

$$u^* \stackrel{?}{\in} \underset{u \in \mathcal{U}}{\text{Argmin}} J(u).$$

Le vendeur de journaux prends une décision déterministe face à un aléa dont il connaît la loi mais pas la réalisation (Décision-Hasard).

MINIMISATION DU COÛT EN ESPÉRANCE

Commande optimale u^* :

- ▶ Si $c_M \leq c$ alors J est une fonction croissante et ne rien commander est optimal.
- ▶ Si $c_M > c$ alors J atteint son minimum en u^* :

$$u^* = \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq (c_M - c)/(c_M + c_S)\}$$

où F est la fonction de répartition de \mathbf{W} , $F(z) = \mathbb{P}(\mathbf{W} \leq z)$.

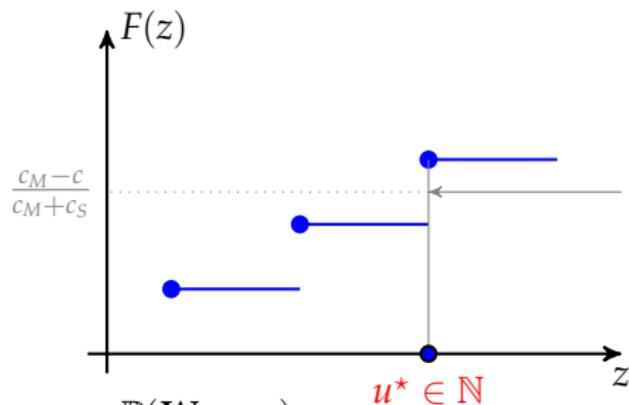
- ▶ Si \mathbf{W} est une variable aléatoire entière alors $u^* \in \mathbb{N}$

En effet :

$$\begin{aligned} J(u) &= c_M \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[\mathbf{W}] + (c - c_M)u + (c_M + c_S) \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[(u - \mathbf{W})_+] \\ &= c_M \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[\mathbf{W}] + (c - c_M)u + (c_M + c_S) \int_0^u F(z) dz \end{aligned}$$

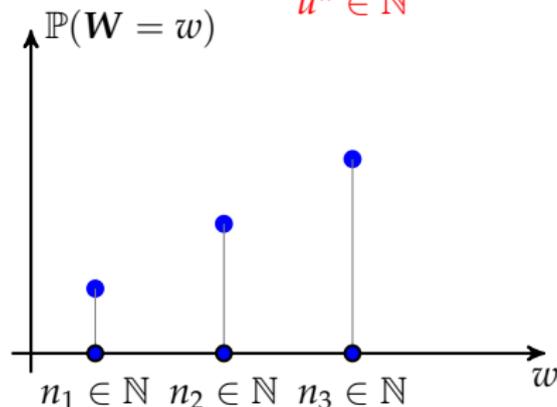
J est continue et coercive. Pour $c_M > c$ elle décroît puis croît avec un minimum en u^* .

MINIMISATION DU COÛT EN ESPÉRANCE

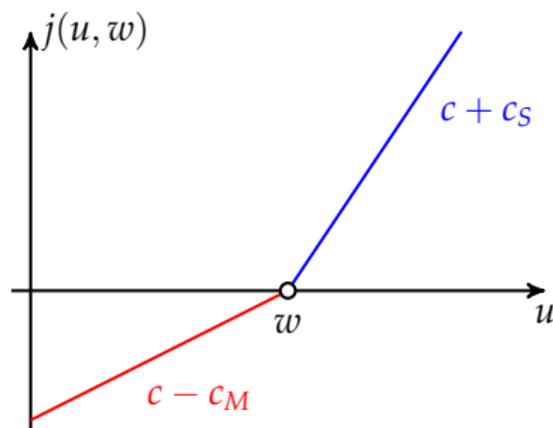


La commande optimale prend des **valeurs entières**

$$u^* = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S} \right\},$$



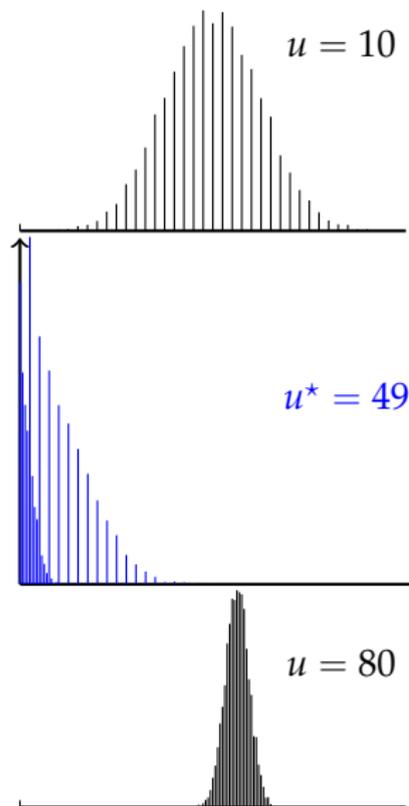
si la demande est une **variable aléatoire entière**.

MINIMISATION DU COÛT EN ESPÉRANCE $c_M \leq c$ 

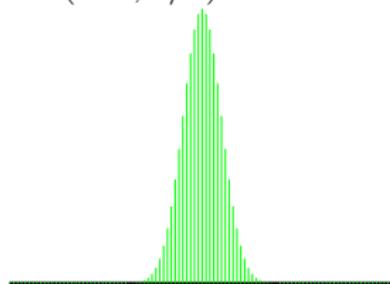
On remarque que

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \geq \min_{u = \phi(w)} J(u) = \mathbb{E}_W[\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, W)]$$

Or $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, w)$ est atteint pour $u = 0$ **pour tout** w et donne une commande admissible pour le problème $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, w)$.

DISTRIBUTION DES COÛTS $j(u, W)$ 

Distribution de la demande
 $\text{bin}(100, 1/2)$.



STOCK INITIAL ET COÛT FIXE D'APPROVISIONNEMENT

On suppose ici que l'on peut avoir un stock initial $x \in \mathbb{Z}$ et que toute commande à un coup fixe c_F . Le coût à minimiser devient maintenant :

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + cu + c_s(x + u - \mathbf{W})_+ + c_M(\mathbf{W} - x - u)_+] \\ &= c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} - cx + \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[j(u + x, \mathbf{W})] \\ &= c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + J(u + x) - cx\end{aligned}$$

Commande optimale $u^*(x)$ pour $c_M > c$:

La commande optimale est une stratégie (s, S) :

$$u^*(x) = (S - x) \mathbb{I}_{\{x \leq s\}}$$

Quand le stock devient en dessous de s , on commande des journaux de façon à ramener le stock à S . La valeur de S est donnée

$\text{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} J(u)$.

STOCK INITIAL ET COÛT FIXE D'APPROVISIONNEMENT

Soit S le stock donné par $\{S\} = \text{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} J(u)$.

- ▶ Si $x \geq S$, Il est optimal de ne rien faire ($J(\cdot) \nearrow$ et $c_F \geq 0$) :

$$\tilde{J}(0) = J(x) - cx \leq J(x+u) - cx + c_F = \tilde{J}(u)$$

- ▶ Si $x \leq S$, comme $J(\cdot)$ est minimale en S :

- ▶ Si on commande, il faut commander $u = S - x$ de coût

$$\tilde{J}(u) = J(S) - cx + c_F$$

- ▶ Si on ne commande rien le coût est $J(x) - cx$

On doit choisir la solution la moins coûteuse, Il faut donc compléter son stock jusqu'à S si $J(x) \geq c_F + J(S)$ et ne rien faire sinon. De plus, on remarque que :

$$\{x \mid J(x) \geq c_F + J(S)\} = \{x \mid x \leq s\}$$

où s est donné par

$$\text{où } s := \sup \{z \in (-\infty, S) \mid J(z) \geq c_F + J(S)\}$$

STOCK INITIAL ET COÛT FIXE D'APPROVISIONNEMENT

Posons $\mathbf{X}_0 = x$ et $\mathbf{X}_1 = f(\mathbf{X}_0, u)$ avec $f(x, u) := x + u - w$ et

$$\tilde{j}(u, x_1) := c_F \mathbb{I}_{\{u > 0\}} + cu + c_s(x_1)_+ + c_M(-x_1)_+$$

Le vendeur de journaux : problème dynamique

$$\min_{u \in \mathcal{U}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0} \mathbb{E}_W[\tilde{j}(u, \mathbf{X}_1)]$$

sous contraintes

$$\mathbf{X}_0 = x \quad \mathbf{X}_1 = f(\mathbf{X}_0, u, \mathbf{W})$$

Avec une contrainte de non-anticipativité

$$\mathcal{U} = \{U : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{N}\}$$

La commande du nombre de journaux est contrainte à n'utiliser que l'information disponible $\mathbf{X}_0 = x$ et pas la demande future \mathbf{W} .

UNE “CHAÎNE” DE MARKOV

Les deux stocks de journaux X_0 et X_1 peuvent être vus comme les états d’une chaîne de Markov contrôlée. On peut autoriser des stocks négatifs et on a alors a priori $X_0 \in \mathbb{Z}$ et $X_1 \in \mathbb{Z}$.

- ▶ Supposons $u \in \mathbb{N}$ fixé, la matrice de transition de la chaîne de Markov est

$$P^u_{x_0, x_1} = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)$$

$$P^u_{x_0, x_1} = \begin{cases} \mathbb{P}(W = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + u - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ Supposons que u puisse être choisi comme une fonction de X_0 , $u = \phi(X_0)$ alors

$$P^\phi_{x_0, x_1} = \begin{cases} \mathbb{P}(W = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + \phi(x_0) - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ Étudier des problèmes sur N pas de temps sera l’objet du prochain cours.

TEMPS D'ARRÊT ET PROBLÈME DE CONTÔLE

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov d'espace d'état \mathbb{X} . On considère $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \Delta$ et deux matrices de transitions

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \quad P_{x,y}^C = P_{x,y} \quad \text{et} \quad P_{\Delta,\Delta}^C = 1$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \quad P_{x,y}^S = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Y} \quad P_{x,\Delta}^S = 1$$

On cherche à évaluer un coût sur un pas de temps pour la chaîne partant de $X_0 = x \in \mathbb{X}$:

$$v(x) = \sup_{u \in \{C, S\}, X_0 = x} \mathbb{E} [c(u, X_0) + f_1(X_1)]$$

où la matrice de transition de la chaîne est P^u si le contrôle utilisé est u et avec $c(C, \cdot) = 0$ et $c(S, x) = f_0(x)$ et $f_1(\Delta) = 0$. On obtient pour $x \in \mathbb{X}$

$$v(x) = \sup \left(\sum_{y \in \mathbb{X}} P_{x,y} f_1(y), f_0(x) \right)$$

UN PROGRAMME LINÉAIRE

Le problème du vendeur de journaux

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) = \mathbb{E}_{\mathbf{W}}[j(u, \mathbf{W})]$$

avec

$$j(u, w) = c_M w + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w)_+$$

peut s'écrire comme un problème linéaire

EXPLICITONS L'ESPÉRANCE

La demande W prends un nombre fini S de valeurs $w_s, s \in \mathbb{S}$ avec probabilité π_s

$$\mathbb{P}(W = s) = \pi_s \forall s \in \mathbb{S}$$

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s = 1 \text{ and } \pi_s \geq 0, \forall s \in \mathbb{S}$$

Le critère à minimiser s'écrit alors

$$J(u) = \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+)$$

EXPLICITONS LE $\text{MAX}(\cdot)_+$ AVEC DES VARIABLES SUPPLÉMENTAIRES (OPTIM S1)

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+) \\
 &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s \min_{\substack{v_s \geq 0 \forall s \in \mathcal{S} \\ v_s \geq u - w_s \forall s \in \mathcal{S}}} c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s \\
 &= \min_{\substack{v_s \geq 0 \forall s \in \mathcal{S} \\ v_s \geq u - w_s \forall s \in \mathcal{S}}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s (c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s)
 \end{aligned}$$

LE PROBLÈME DU VENDEUR DE JOURNAUX COMME UN PROGRAMME LINÉAIRE

$$\min_{u \in \mathbb{U}, (v_s)_{s \in \mathbb{S}} \in \mathbb{V}^{\mathbb{S}}} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)v_s$$

sous les contraintes

$$v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

$$v_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

$$u \geq 0$$

On obtient un programme linéaire en nombres entiers ($\mathbb{U} = \mathbb{N}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{N}$) et on peut étudier la version relâchée ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{R}$).

Question :

Est-ce que la version relâchée donne une solution entière ?

LA CONTRAINTE DE MESURABILITÉ

Le fait que la commande $u \in \mathbb{U}$ doit être la même pour toutes les réalisations de w_s peut s'exprimer en introduisant de nouvelles commandes $u_s \in \mathbb{U}^{\mathbb{S}}$ (**duplication de variables**) et en les contraignant à être toutes égales, $u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S}$.

$$\min_{u \in \mathbb{U}, u_s \in \mathbb{U}^{\mathbb{S}}, (v_s)_{s \in \mathbb{S}} \in \mathbb{V}^{\mathbb{S}}} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s c_M w_s + (c - c_M) u_s + (c_M + c_S) v_s$$

sous les contraintes

$$v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

$$v_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

$$u \geq 0$$

$$u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

Si on dualise les contraintes $u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S}$ on découple les problèmes s par s . Des méthodes numériques sont basées sur cette idée.

POUR ALLER PLUS LOIN : COURS DE L'ÉCOLE DES PONTS

- ▶ 1A : cours d'« Optimisation » (matrices unimodulaires)
- ▶ 2A :
 - ▶ cours de « Recherche Opérationnelle »,
 - ▶ cours d'« Optimisation et contrôle »,
 - ▶ cours « Modéliser l'Aléa »